Hinweise zu Anforderungen des Faches Mathematik in Klasse 11 des Beruflichen Gymnasiums Wirtschaft

Das folgende Material soll Ihnen helfen

- sich einen Überblick darüber zu verschaffen, welche inhaltlichen Voraussetzungen Sie im Fach Mathematik mitbringen sollten (Sollwert),
- sich einen Überblick darüber zu verschaffen, welche Kenntnisse Sie mitbringen und welche Kenntnisse Ihnen eventuell aber auch fehlen (Istwert) und
- eventuell vorhandene Lücken gezielt aufzuarbeiten, indem Sie selbst anhand von Beispielen gleichartiges Übungsmaterial suchen können oder mithilfe der Literatur- tipps oder Internetlinks vorhandenes Material dazu nutzen.

Inhaltlich werden im Folgenden drei Bereiche angesprochen:

1. Begriffe

2. Mathematische Darstellungen / Berechnungen

3. Themengebiete.

1. Begriffe

Die folgenden Begriffe sollten Sie in ihrer Bedeutung kennen und sie zur Erklärung von mathematischen Sachverhalten verwenden können:

- Addition, addieren, Summe, Summand
- Subtraktion, subtrahieren, Differenz
- Multiplikation, multiplizieren, Produkt, Faktor
- Division, dividieren, Quotient
- Zähler und Nenner eines Bruches
- Kehrwert eines Bruches
- echter und unechter Bruch
- Term im Unterschied zu einer Gleichung
- Radikand im Zusammenhang mit Wurzeln
- Potenz bestehend aus Basis und Exponent
- Funktion, Funktionswert, Stelle
- Nullstelle
- y-Achsenabschnitt
- Steigung

Dies sind besonders wichtige Begriffe, die im Folgenden in den passenden Abschnitten bereits verwendet werden. Dort sind auch noch einige zusätzliche Begriffe verwendet, die Ihnen ebenso vertraut sein müssten.

2. Mathematisch darstellen – Rechnen

a) Bruchrechnung

Addition von Brüchen: $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=$ und $\frac{x+1}{2}+\frac{3}{x-1}=$

Subtraktion von Brüchen: $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=$ und $\frac{4}{1-x^2}-\frac{2x+1}{1-x}=$

Multiplikation von Brüchen: $\frac{2}{3}-\frac{6}{8}=$ und $\frac{2}{x+1}\cdot\frac{3x+3}{2x-2}=$

Division von Brüchen: $\frac{2}{3}:\frac{8}{9}=$ und $\frac{x+1}{x-1}:\frac{2x+4}{4x-4}=$

Überlegen Sie genau, wie man zwei Brüche multipliziert, dividiert, addiert bzw. subtrahiert. Notieren Sie sich dazu jeweils eine Regel
(z. B.: „Zwei Brüche werden addiert, indem man …“).

Erklären Sie die beiden Begriffe „**Kürzen**“ und „**Erweitern**“.
Verdeutlichen Sie, an **welchen Stellen Sie diese Umformungen verwenden.**

Achten Sie darauf, notwendige **Klammern** zu setzen.

Die erste Aufgabe ist jeweils ein einfaches Zahlenbeispiel. In der zweiten Aufgabe **wenden Sie die gleichen Rechenschritte auf Terme an, in denen x vorkommt.**

Sie sollten in der Lage sein, diese Rechnungen auszuführen. Ziel ist es am Ende je- weils einen Bruch zu haben, der so weit wie möglich vereinfacht ist.

Außerdem sollten Sie wissen, was der **Kehrwert** eines Bruches ist.

Sie sollten einen **unechten Bruch** in eine **gemischte Zahl** umwandeln können und umgekehrt.

Sie sollten von den gängigen Brüchen die passende **Dezimalzahl** kennen.

Sie sollten einen Bruch mit einer ganzen Zahl multiplizieren können.

b) Lösen von Gleichungen

Beim **Lösen einer Gleichung** kommt es darauf an, dass man für **die Unbekannte** (Fachbegriff: Variable) **eine Zahl oder mehrere Zahlen berechnet**, die die Gleichung erfüllt / erfüllen. Dies bedeutet, wenn ich diese Zahl / diese Zahlen in die Gleichung anstelle von der Variablen einsetze, erhalte ich am Ende eine richtige, der Mathematiker sagt wahre, Aussage. Die Variable ist meistens x, es kann aber auch jeder andere be- liebige Buchstabe sein.

Der Lösungsweg besteht darin, dass man die Gleichung **schrittweise umformt**, indem man eine mathematische Rechenoperation, z. B. Addition von 3, **auf beiden Seiten** durchführt. Durch jeden Umformungsschritt wird die Gleichung vereinfacht,
z. B. Brüche werden aufgelöst, Teile werden zusammengefasst, z. B. 3x + 2x ergeben 5x und die Gleichung wird geordnet, z. B. alle Teile, die ein x enthalten, stehen auf einer Seite und auf der anderen Seite steht nur noch eine Zahl, die dann die Lösung darstellt.
Gleichungen wie die folgenden sollten Sie problemlos lösen können.

Aufgaben:

$\frac{5-20x}{6} = -\frac{5}{2}$ **x = 1**

$11(3x-1) - 5(2-3x) = 75$ **x = 2**

$\frac{19}{6}x = -\frac{127}{24}x + \frac{9}{2}x + \frac{301}{48}x - \frac{67}{12}x = 49$ **x = 16**

$x(2x+4) - 2(x-8)^2 = -4$ $\boldsymbol{x = -\frac{31}{9} \approx 3,44}$

$2 \cdot \frac{x+3}{4} - 3 \cdot \frac{x-4}{5} = 5 \cdot \frac{x-7}{2} - 2$ **x = 9**

Besonders wichtig ist es hierbei, dass Sie wissen

- wie man eine Klammer auflöst, vor der ein Minus steht;
- wie man einen Klammerausdruck potenziert;
- was man zuerst macht:
  - einen Ausdruck potenzieren,
  - einen Ausdruck, der in Klammern steht, zuerst berechnen, wenn das geht, eine Multiplikation oder Division durchführen,
  - eine Addition oder Subtraktion durchführen.

Die hier aufgelistete Reihenfolge ist die richtige.

In Gleichungen können manchmal auch mehrere Unbekannte vorkommen, die unterschiedliche Bedeutungen haben.
In der Gleichung y = 2x + 1 ist x die unabhängige Variable, d. h., für das x können alle Zahlen einer Grundmenge (z. B. alle reellen Zahlen) eingesetzt werden.
y ist die abhängige Variable, denn ihr Wert ergibt sich, wenn für x etwas in den Term eingesetzt wird, z. B. ist x = 3 gewählt, dann ergibt sich y = 7.
x und y sind **Variablen**, d. h. sie können viele verschiedene Werte annehmen, nämlich alle aus der Grundmenge. Eine Gleichung kann zusätzlich zu x und y auch noch einen **Platzhalter** enthalten, diese Unbekannte steht dann für eine feste, aber noch unbekannte Zahl.
In der Gleichung y = 2x + a ist a ein Platzhalter für eine Zahl, die addiert wird, wenn a positiv ist, z. B. a = 3, oder die subtrahiert wird, wenn a negativ ist, z. B. a = – 1.
Beim Lösen von Gleichungen wird in der Regel nach x aufgelöst und eventuell vorhandene Platzhalter werden dann beim Umformen wie Zahlen behandelt.

c) Rechnen mit Potenzen

Ein Produkt aus mehreren gleichen Faktoren wird kürzer als **Potenz** geschrieben.
Beispiel:, dabei heißt 5 die **Basis** und 3 der **Exponent** (Hochzahl) der Potenz.

Ein Exponent kann dabei auch eine negative Zahl sein:

$$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

Beim Rechnen mit **Potenzen** kommt es darauf an, bestimmte Rechen- bzw. Umformungsregeln zu kennen.

1. Es gilt: $x^2 \cdot x^5 = x^7$
Potenzen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.

2. Es gilt: $\frac{x^5}{x^3} = x^2$
Potenzen werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert.

3. Es gilt: $(x^5)^2 = x^{10}$
Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.

4. Es gilt: $(8x)^2 = 64x^2$
Ein Produkt wird potenziert, indem jeder Faktor potenziert wird. Fehlt die Klammer, wird nur das x potenziert, der Ausdruck kann dann nicht vereinfacht werden.

Aufgaben:

$(-5)^3 + (-4)^2 =$

$(-8b)^4 - (12b)^3 =$

$-5^3 + (-4^2) =$

$-8b^4 - 12b^3 =$

$3n^3x^2 \cdot 5x^4n^2 = (3x^2y^3)^7 =$

Zehnerpotenzen werden dazu benutzt, um sehr große oder sehr kleine Zahlen kürzer darzustellen. Dabei bestimmt der Exponent, um wie viele Stellen das Komma nach rechts (positiver Exponent) bzw. nach links (negativer Exponent) verschoben werden muss.
Beispiele:

$1340000 = 1{,}34 \cdot 10^6$

$0{,}003 = 3 \cdot 10^{-3}$

Bilden Sie ebenso: $720000000 =$

$0{,}000025 =$

$1{,}2 \cdot 10^5 =$

$3{,}75 \cdot 10^{-5} =$

d) Rechnen mit Wurzeln

Das Wurzelziehen benötigt man, um in einer Gleichung mit einer Potenz den Exponenten aufzulösen oder anders gesagt die Basis der Potenz zu berechnen.
Das Wurzelziehen ist also die Umkehrung des Potenzierens.
Beispiel: $x^3 = 8$ lässt sich lösen durch das Ziehen der dritten Wurzel: $x = \sqrt[3]{8} = 2$
Dabei ergibt sich die 2 aus der Überlegung, welche Zahl man mit 3 potenzieren muss, um 8 zu erhalten.
Die häufigste Wurzel ist die Quadratwurzel, sie kann nur aus einer nicht negativen Zahl gezogen werden. Abkürzend spricht man z. B. nur von der Wurzel aus 4 und schreibt auch

die kleine Zwei auf dem Wurzelzeichen nicht mit, wenn man die Quadratwurzel meint. Beim Rechnen mit **Wurzeln** kommt es darauf an, dass man bei der Addition und Subtraktion in der Regel nicht zusammenfassen kann oder nicht in zwei Wurzeln trennen kann, während man dies bei der Multiplikation und Division darf.

Beispiele:

1. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ kann **nicht** zu $\sqrt{5}$ zusammengefasst werden, beide Wurzeln müssen getrennt als Dezimalzahlen bestimmt werden, deren Werte man dann addieren kann.

2. $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
Die erste Wurzel kann **nicht** in zwei Wurzeln aufgeteilt werden, um daraus einzeln die Wurzel zu ziehen.

Die Beispiele 1 und 2 gelten auch, wenn nicht addiert, sondern subtrahiert wird.

3. $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$ aber auch: $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36}\ \cdot= 6$
Hier können die Wurzeln zusammen oder getrennt berechnet werden.

4. $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}} \cdot= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ aber auch: $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}} = \sqrt{\frac{9}{36}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
Hier können die Wurzeln zusammen oder getrennt berechnet werden.

Aufgaben:

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} =$

$\sqrt{12} \cdot \sqrt{108} =$

$\sqrt[4]{12} \cdot \sqrt[4]{108} =$

$\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{125} =$

$\sqrt{7x^3 : 28x} =$

$\sqrt{12a} : \sqrt{3a} =$

e) Ausmultiplizieren und Ausklammern / Faktorisieren

Ausmultiplizieren heißt, dass ein Produkt in eine Summe umgewandelt werden soll. Als Faustregel gilt, dass jeder Wert des einen Faktors mit jedem Wert des anderen Faktors multipliziert werden muss.

Beispiele / Aufgaben:

$5\,(3x - 4y + 6z) = 15x - 20y + 30z$

$(-4)\,(-6x^2 + 10x - 12) = 24x^2 - 40x + 48$

$(x + 3)\,(4 - x) = 4x - x^2 + 12 - 3x = -x^2 + x + 12$

$(5 - 2x)\,(x^2 - 3x + 10) = -2x^3 + 11x^2 - 35x + 50$

Ausklammern / Faktorisieren ist der umgekehrte Vorgang, d. h., eine Summe soll in ein Produkt umgewandelt werden. Gesucht ist dabei ein Faktor (meistens der größte gemeinsame Teiler), der in jedem Summanden enthalten ist.

Beispiele / Aufgaben:

$4x^5 - 6x^4 - 8x^3 =$ $2x^3 (2x^2 - 3x - 4)$

$x^2yz - xy^2z + xyz^2 =$ $xyz (x - y + z)$

$25a^2b^3c^4 + 50a^3b^4c^2 + 75a^4b^2c^3 =$ $25a^2b^2c^2$ (???)

$125x^4 - 50x^2 + 5x = 5x$ (???)

f) Binomische Formeln

Die Binomischen Formeln dienen dazu bestimmte Summen in Produkte umzuwandeln bzw. umgekehrt.
Die Formeln lauten:
(1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
(2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
(3) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Aufgaben: $(1 - 2x)(2x + 1) =$

$9a^2 - 25b^2 =$

$x^2 + 6x + 9 =$

$(2x - 4z)^2 =$

$z^2 - 10z + 36 =$

g) Umgang mit dem Koordinatensystem

Wenn ein Graph bzw. das Schaubild, z. B. von einer Geraden oder von einer Parabel, gezeichnet werden soll, muss für beide Achsen ein **Maßstab** ausgewählt werden, damit das, was man zeichnen möchte gut hineinpasst. Außerdem sind die **Achsen** zu **beschriften**. Gegebene Punkte müssen richtig eingezeichnet werden können, z. B. zwei Punkte, die dann zu einer Geraden verbunden werden sollen. Punkte in der Zeichnung müssen richtig abgelesen werden können, z. B. der Schnittpunkt zweier Geraden.

h) Mathematische Formelsprache

In der Mathematik werden viele Sachverhalte mithilfe von Formelzeichen ausgedrückt. Im Folgenden finden Sie einige Zeichen, die Sie kennen sollten.

$\approx$	ist ungefähr gleich	$\sqrt{2} \approx 1{,}41$
$<$	kleiner als	$3 < 4$; $x < 3$, d.h. alle Zahlen, die kleiner sind als 3
$>$	größer als	$5 > 4$
$\leq$	kleiner gleich	$x \leq 3$, d.h. alle Zahlen, die kleiner oder gleich 3 sind
$\geq$	größer gleich	$x \geq 4$
$\in$	Element von	$1 \in Z^+$, d. h.1 ist eine ganze positive Zahl
$\notin$	nicht / kein Element von	$1 \notin Z^-$, d. h.1 ist keine negative ganze Zahl
$P(x \mid y)$	Punkt mit den Koordinaten x und y; Punkte werden mit großen Buchstaben bezeichnet	

$f(x) = ...$ Funktionsgleichung der Funktion f; gelesen: f von x ist gleich ... $f(x) = 2x - 5$

$\{1, 2, 3\}$ Menge mit den Elementen 1, 2, 3

z. B. $A = \{1, 2, 3\}$ Mengen mit großen Buchstaben bezeichnen

i) Textaufgaben

Viele Aufgaben werden als Textaufgaben gestellt. Es ist also wichtig, dass man in der Lage ist, diese Aufgabentexte z. B. durch Unterstreichungen zu strukturieren, um sie verstehen zu können. In der Regel gibt es gegebene und gesuchte Größen, diese muss man aus dem Text herausfiltern.

Zum Abschluss muss häufig ein Antwortsatz geschrieben werden, der orthographisch (Rechtschreibung und Zeichensetzung) und grammatikalisch richtig sein soll.

3. Themengebiete

Für beide der folgenden Themengebiete gilt, dass es sich dabei um bestimmte Funk-tionen handelt. Daher ist es in diesem Zusammenhang wichtig zu wissen, was eine **Funktion** (Zuordnung) ist. Eine Funktion lässt sich graphisch veranschaulichen, indem man eine Wertetabelle anlegt (Berechnung von Punkten mithilfe des Funktionsterms, die zum Schaubild gehören) und mit ihr die Zeichnung erstellt. Dies sollte Ihnen für Geraden und Parabeln gelingen.

a) Lineare Funktionen / Geraden

- die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + b$ kennen und wissen, welche Bedeutung m und b für die Gerade haben
- eine Gerade zeichnen, wenn zwei Punkte vorgegeben sind
- eine Gerade zeichnen, wenn die Steigung und der y-Achsenabschnitt vorgegeben sind
- die Nullstelle einer Geraden berechnen
- den y-Achsenabschnitt einer Geraden aus der Geradengleichung ablesen können bzw. ihn berechnen können
- prüfen, ob ein vorgegebener Punkt auf einer Geraden liegt oder nicht
- die Gleichung der Geraden bestimmen, wenn die Gerade im Koordinatenkreuz gezeichnet ist
- die Nullstelle einer Geraden ablesen, wenn die Gerade im Koordinatenkreuz gezeichnet ist
- den y-Achsenabschnitt einer Geraden ablesen, wenn die Gerade im Koordinatenkreuz gezeichnet ist
- den Schnittpunkt von zwei gegebenen Geraden berechnen

Aufgaben:

1. Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden, die durch die Punkte A(– 2/10) und B(3/– 15) verläuft und zeichnen Sie die Gerade in ein Koordinatenkreuz.

2. Zeichnen Sie die Gerade, für die gilt: $m = -2$ und $b = 1$.

3. Berechnen Sie den Schnittpunkt der folgenden Geraden:

$$y = \frac{5}{2}x + 2 \qquad \text{und} \qquad y = -\frac{1}{2}x - 5$$

4. Prüfen Sie, ob die Punkte A(1/– 2) und B(1/5) zum Graphen der Funktion $y = 5x - 7$ gehören.

5. Berechnen Sie die Nullstelle und den y-Achsenabschnitt der Geraden $y = -0{,}75x + 3{,}5$.

b) Quadratische Funktionen / Parabeln

- die **Normalparabel** $y = x^2$ im Koordinatenkreuz einzeichnen können.
- wissen, woran man in der Parabelgleichung erkennt, ob eine Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist
- den Streckfaktor einer Parabel aus der Parabelgleichung ablesen können und seine Bedeutung für das Aussehen der Parabel beschreiben können (schmaler oder weiter als die Normalparabel)
- eine verschobene Normalparabel zeichnen können, wenn ihr **Scheitelpunkt** gegeben ist
- die Nullstellen einer Parabel mithilfe der **quadratischen Ergänzung** berechnen können (dazu ist die Kenntnis der binomischen Formeln unbedingte Voraussetzung)
- die Nullstellen einer Parabel mit der **pq-Formel** (oder mit der abc-Formel) berechnen können
- mögliche Schnittpunkte einer Parabel mit einer Geraden bzw. von zwei Parabeln berechnen können.

Aufgaben:

1. Zeichnen Sie die Normalparabel sowie die folgenden Parabeln
$y = x^2 + 1$, $y = (x-3)^2$, $y = (x+4)^2$ sowie $y = (x-1)^2 - 2$
in ein geeignetes Koordinatensystem und geben Sie jeweils den Scheitelpunkt an.

2. Geben Sie an, welche der folgenden Parabeln nach unten geöffnet sind und welche der Parabeln breiter bzw. schmaler als die Normalparabel verlaufen.

(1) $y = \frac{1}{3}x^2$ (2) $y = 0{,}1(x+3)^2 + 2$ (3) $y = 3x^2 - 1$

(4) $y = -0{,}5x^2$ (5) $y = 4(x-4)^2$ (6) $y = -10(x+1)^2 + 20$

3. Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen mithilfe der pq-Formel (abc-Formel).

(1) $x^2 + 12x - 45 = 0$ (2) $x^2 - 8x + 7 = 0$ (3) $x^2 - 32x + 50 = -10$

(4) $x^2 - 18x + 81 = 0$ (5) $2x^2 + 12x - 54 = 0$ (6) $0{,}5x^2 - 2x + 2{,}5 = 0$

4. Berechnen Sie jeweils die Schnittpunkte.

(1) $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ und $g(x) = x$

(2) $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ und $g(x) = 3x - 2$

(3) $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ und $g(x) = 3x - 3$

(4) $f(x) = -0{,}6x^2 - 5x - 6{,}4$ und $h(x) = \frac{14}{15}x^2 + 5\frac{11}{15}x + 2\frac{4}{5}$

Internetlinks
www.arndt-bruenner.de/mathe
www.geogebra.org
www.mathe-online.at